PROFESSOR ERKLÄRBÄR

Serie Informatik · Folge 2 · Advanced

INFORMATIK

LEHRERINFO ZUM VIDEO

Zahlensysteme und Zahlendarstellung

FACH	STUFE	DAUER	VIDEO
Informatik	Gymnasium · Sek II	16 min	youtube.com/@Erklaerbaer

01 Lernziele

Nach dem Video können die Schülerinnen und Schüler …

- Stellenwertsysteme zu beliebiger Basis erklären und zwischen den Basen 2, 8, 10 und 16 umrechnen (auch mit dem Horner-Schema),
- Hexadezimalzahlen lesen und anwenden (Bytes, Farbcodes, Speicher- und MAC-Adressen),
- negative ganze Zahlen im Zweierkomplement darstellen und damit subtrahieren,
- Wertebereiche von 8-, 16-, 32- und 64-Bit-Zahlen angeben und Überläufe erkennen und erklären,
- Fest- und Gleitkommazahlen (IEEE 754) unterscheiden, eine Zahl ins Single-Format umrechnen und Rundungsfehler begründen.

02 Voraussetzungen

Bit, Byte, Stellenwerte, Umrechnen binär ↔ dezimal und binäre Addition mit Übertrag (Folge 2 · Grundlagen; im Video als Wiederholung von 60 Sekunden). Potenzgesetze. Codierung von Zeichen (ASCII, Unicode) folgt in Folge 3, der Addierer als Schaltung in Folge 4 Advanced.

03 Ablauf des Videos

ZEIT	KAPITEL	INHALT UND BEISPIEL
0:00	Einstieg	YouTube-Zähler an der Grenze $2^{31} - 1$ · Rakete · Ident · Ausblick Mini-CPU (Folge 17)
0:49	Was du brauchst	EVA, Bit und Byte, Stellenwerte (1101 = 13), Umrechnen, $1 + 1 = 10_2$ · Hinweis auf die Grundlagen-Folge
1:37	Jede Basis ist möglich	Basis 2, 8, 10, 16 · Ziffer · Basis$^{\text{Stelle}}$ · 352 zerlegt · Ziffern A–F · Horner-Schema für 1101_2
2:54	Hexadezimal	$16 = 2^4$, Nibble · 1100 1010 = 0xCA · 0x41 = 65 · Farbcode #E08A4E = 224/138/78 · 200 = 0xC8 · MAC, Adressen, Fehlercodes PAUSE-FRAGE

		#00FF00, 2^{24} Farben · Merksatz
4:51	Oktal	3 Bit pro Ziffer · Dateirechte rwx = 4 2 1 · chmod 755
5:26	Negative Zahlen	Betrag und Vorzeichen (zwei Nullen, falsche Addition) · Zweierkomplement · −13 = 1111 0011 · Probe · 7 − 13 = −6 PAUSE-FRAGE −1 und −128 · Merksatz
7:35	Wertebereich und Überlauf	Tabelle 8–64 Bit · Zahlenring: 100 + 50 = −106 · Pac-Man Level 256 · Ariane 5 · Unix-Zeit 2038 · Merksatz
9:33	Kommazahlen	Festkomma ($0{,}11_2$ = ¾) · Gleitkomma, IEEE 754 single/double · 5,75 = 0x40B80000 · 0,1 periodisch · 0.1 + 0.2 · Geld in Cent
11:33	Projekt-Baustein	Mini-CPU: 8 Bit Zweierkomplement, ein Addierer für Plus und Minus, Hex-Bytes
11:52	Prüfungsfallen	fünf Fallen (siehe 04)
12:53	Zusammenfassung	fünf Kernaussagen · YouTube-Zähler mit 64 Bit
13:31	Quiz	4 Fragen · Endkarte Folge 3 Advanced

04 Prüfungsfallen

- Zweierkomplement = nur invertieren – das ist das Einerkomplement; danach muss 1 addiert werden.
- 1111 1111 ist immer 255 – nur ohne Vorzeichen; im 8-Bit-Zweierkomplement ist es −1. Ein Bitmuster bekommt seine Bedeutung erst durch die Interpretation.
- Der Übertrag aus der höchsten Stelle gehört zum Ergebnis – im festen Format fällt er weg. Ein Überlauf zeigt sich am Vorzeichen: zwei positive Summanden, negatives Ergebnis (oder umgekehrt).
- Gleitkomma rechnet exakt, wenn genug Stellen da sind – 0,1 ist binär periodisch; Gleitkommazahlen nie mit == vergleichen.
- Hex-Ziffer B = 12 – A = 10, B = 11 … F = 15.

05 Einsatz im Unterricht

Einstieg: Die Grenze 2 147 483 647 an die Tafel schreiben und raten lassen, woher sie kommt; danach Einstieg und Kapitel 1 schauen.

Werkstatt: Im Browser oder in Python `hex(65)`, `int("C8", 16)`, `0.1 + 0.2` und `(100 + 50) & 0xFF` ausprobieren.

Farbenlabor: In einem Bildprogramm Farben über Hex-Codes einstellen und die RGB-Werte von Hand nachrechnen (Aufgabe 2).

Prüfungsvorbereitung: Kapitel 9–11 vor der Prüfung; die Aufgaben 3, 4 und 6 sind im Stil schriftlicher Prüfungen gestellt.

Hinweis: Die MAC-Adresse, die Speicheradresse und der Fehlercode im Video sind Beispiele. Die Unix-Zeit ist in vielen Systemen inzwischen 64 Bit breit; betroffen sind vor allem ältere eingebettete Systeme und

Dateiformate. Die Ariane-5-Variable war ein Wert der horizontalen Geschwindigkeit (horizontal bias) im Trägheitsnavigationssystem.

06 Quellen

- IEEE Std 754-2019: IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic
- David Goldberg: „What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic“, ACM Computing Surveys 23 (1991)
- J. L. Lions u. a.: „Ariane 5 Flight 501 Failure – Report by the Inquiry Board“, ESA/CNES, Paris (19. Juli 1996)
- YouTube: Mitteilung zum Aufrufzähler von „Gangnam Style“ (Umstellung auf eine 64-Bit-Ganzzahl), Dezember 2014
- The Open Group: POSIX.1, Definition „Seconds Since the Epoch“ (Unix-Zeit) · chmod(1)
- Gesellschaft für Informatik: Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe II (2016) – informatikstandards.de

NAME _____ KLASSE _____ DATUM _____

Zahlensysteme und Zahlendarstellung

1 Umrechnen ●●○

Berechne a) 0x3F dezimal und binär, b) 2026 in Hexadezimal, c) 755_8 binär und dezimal. d) **Bestimme** den Wert von 2120_3 mit dem Horner-Schema.

2 Farbcodes ●○○

Berechne die RGB-Werte der Farbe #1E90FF und **begründe**, warum es mit 3 Byte genau 2^{24} Farben gibt.

3 Zweierkomplement ●●○

Stelle −45 im 8-Bit-Zweierkomplement **dar** und **berechne** 20 − 45 als binäre Addition. **Prüfe** das Ergebnis, indem du es zurückrechnest.

4 Überlauf erkennen ●●●

Berechne 90 + 60 und (−100) + (−50) im 8-Bit-Zweierkomplement. **Entscheide begründet**, ob ein Überlauf vorliegt, und gib an, welchen Wert der Computer liest.

5 Wertebereich ●●○

Leite her, warum n Bit im Zweierkomplement den Bereich -2^{n-1} … $2^{n-1} - 1$ abdecken, und gib den Bereich für 16 Bit an.

6 IEEE 754 ●●●

Stelle −6,5 als Gleitkommazahl einfacher Genauigkeit **dar**: Vorzeichen, Exponent, Mantisse und das Ergebnis in Hex.

7 Rundungsfehler und Jahr 2038 ●●●

a) **Erkläre**, warum 0,1 + 0,2 in den meisten Programmiersprachen nicht genau 0,3 ergibt, und **nenne** zwei Strategien für Geldbeträge. b) Ein Vorschlag: Die Unix-Zeit als vorzeichenlose 32-Bit-Zahl speichern. **Berechne**, wie lange sie reicht, und **beurteile** den Vorschlag.

Lösungen

1 Umrechnen

a) 0x3F = 3 · 16 + 15 = 63 = 0011 1111_2. b) 2026 : 16 = 126 Rest 10 (A), 126 : 16 = 7 Rest 14 (E), 7 : 16 = 0 Rest 7 → 0x7EA (Probe 7 · 256 + 14 · 16 + 10 = 2026). c) 755_8 = 111 101 101_2 = 7 · 64 + 5 · 8 + 5 = 493. d) 2 → 2 · 3 + 1 = 7 → 7 · 3 + 2 = 23 → 23 · 3 + 0 = 69.

2 Farbcodes

1E = 1 · 16 + 14 = 30, 90 = 9 · 16 + 0 = 144, FF = 255 → R 30, G 144, B 255 (ein kräftiges Himmelblau). Jeder Kanal hat 8 Bit, zusammen 24 Bit; jedes Bit verdoppelt die Möglichkeiten: 2^{24} = 16 777 216.

3 Zweierkomplement

45 = 0010 1101 → invertiert 1101 0010 → + 1 = 1101 0011 = −45. 20 = 0001 0100; 0001 0100 + 1101 0011 = 1110 0111. Erstes Bit 1 → negativ; invertieren 0001 1000, + 1 = 0001 1001 = 25 → Ergebnis −25. ✓

4 Überlauf erkennen

90 + 60: 0101 1010 + 0011 1100 = 1001 0110 → zwei positive Summanden, Vorzeichenbit 1 → Überlauf; gelesen wird 150 − 256 = −106. (−100) + (−50): 1001 1100 + 1100 1110 = 1 0110 1010, der Übertrag fällt weg → 0110 1010 = 106; zwei negative Summanden, positives Ergebnis → Überlauf (−150 liegt unter −128).

5 Wertebereich

n Bit ergeben 2^n Bitmuster. Die Hälfte mit führender 0 sind die Zahlen 0 … $2^{n-1} - 1$, die Hälfte mit führender 1 die negativen -2^{n-1} … −1 (das höchste Bit hat das Gewicht -2^{n-1}). Weil die Null zu den nicht negativen zählt, gibt es eine negative Zahl mehr. 16 Bit: −32 768 … 32 767.

6 IEEE 754

6,5 = $110{,}1_2$ = 1,101 · 2^2. Vorzeichen 1; Exponent 2 + 127 = 129 = 1000 0001; Mantisse (ohne führende 1) 101 0000 … → 1 10000001 10100000000000000000000 = 1100 0000 1101 0000 0000 0000 0000 0000 = 0xC0D00000.

7 Rundungsfehler und Jahr 2038

a) 0,1 und 0,2 sind binär periodisch und werden auf 52 Mantissenbits gerundet; die Summe der gerundeten Werte liegt knapp über der gerundeten 0,3. Strategien: Beträge als ganze Cent speichern; einen Dezimaltyp verwenden (z. B. decimal, BigDecimal); Vergleiche nur mit Toleranz. b) 2^{32} s ≈ 4,29 Milliarden s ≈ 136 Jahre → reicht bis Februar 2106. Nachteil: Zeitpunkte vor 1970 sind nicht mehr darstellbar, und das Problem wird nur verschoben – 64 Bit ist die bessere Lösung.

Q Quiz im Video

1 B (255) · 2 C (−128 … +127) · 3 B (0,1 ist binär nicht endlich darstellbar) · 4 A (4 Bit)