PROFESSOR ERKLÄRBÄR

Serie Mathematik · Folge 13 · Advanced

MATHE

LEHRERINFO ZUM VIDEO

Grenzwerte berechnen – Folgen, Funktionen und der Weg zur Ableitung

FACH	STUFE	DAUER	VIDEO
Mathematik	Klasse 10–12 · Gymnasium	12 min	youtube.com/@Erklaerbaer

01 Lernziele

Nach dem Video können die Schülerinnen und Schüler …

- die Limes-Schreibweise lesen und konvergente von divergenten Folgen unterscheiden,
- Grenzwerte gebrochener Terme für $n \to \infty$ bzw. $x \to \infty$ durch Ausklammern der höchsten Potenz bestimmen,
- die Summe einer geometrischen Reihe mit $a : (1 - q)$ berechnen,
- Lücken (kürzen) und Polstellen unterscheiden und waagerechte Asymptoten angeben,
- die Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen berechnen.

02 Voraussetzungen

Grenzwert-Begriff (Folge 13 Grundlagen), Bruchterme kürzen und binomische Formeln (Folge 3), Steigung (Folge 5), Potenzen (Folge 7), Tangens (Folge 11).

03 Ablauf des Videos

ZEIT	KAPITEL	INHALT UND PRAXISBEISPIEL
0:00	Einstieg	Tacho: Geschwindigkeit in einem Moment? · Ident · Plan
0:41	Was du brauchst	Grenzwert · Kürzen · Steigung
1:05	Schreibweise und Idee	lim · Schlauch um g · konvergent/divergent
1:39	Grenzwerte von Folgen	$1/n \cdot (3n^2 + 1)/(n^2 - 4) \to 3$ PAUSE-FRAGE
2:56	Die geometrische Reihe	$1/2 + 1/4 + \ldots = 1 \cdot 0{,}999\ldots = 1$ mit Formel
3:46	Funktionen für grosse x	waagerechte Asymptote $y = 3$ · Kondensator
4:24	Lücken und Polstellen	$(x^2 - 9)/(x - 3) \to 6 \cdot 1/(x - 3)$ PAUSE-FRAGE

5:30	Die Zahl e	Zinseszins: 2,00 € → 2,71 € → e
6:17	Der Weg zur Ableitung	x^2 an der Stelle 1: Sekante → Tangente, m = 2
7:09	Jetzt du	zwei Aufgaben 2× PAUSE
8:03	Prüfungsfallen	∞/∞ · 0/0 · Lücke · $(1 + 1/n)^n$
8:43	Skatepark-Baustein	Quarterpipe $0{,}5x^2$ bei x = 2: m = 2, α ≈ 63°
9:14	Zusammenfassung	drei Merksätze
9:42	Quiz	4 Fragen · Endkarte Folge 14 Advanced

04 Typische Fehlvorstellungen

- ∞/∞ = 1 bzw. 0/0 = 0 statt „unbestimmt, erst umformen“ – Kapitel 3, 6 und 10.
- Grenzwert und Funktionswert seien immer gleich (Lücke!) – Kapitel 6 und 10.
- $(1 + 1/n)^n \to 1$, weil „1 hoch irgendwas = 1“ – Kapitel 7 und 10.
- Die Tangente sei „eine Gerade, die die Kurve nur einmal berührt“ – Kapitel 8 (Grenzlage der Sekante).

05 Einsatz im Unterricht

Tabellenkalkulation: $(1 + 1/n)^n$ für n = 1, 10, 100, … und die Sekantensteigung 2 + h für h = 1; 0,1; 0,01 … berechnen lassen.

GeoGebra: Sekante mit Schieberegler für h – die Tangente als Grenzlage sichtbar machen.

Vernetzung: Folge 3 (Kürzen), Folge 11 (Tangens, Steigungswinkel), Physik (Momentangeschwindigkeit, Kondensator).

International: limit, convergent, divergent, geometric series, horizontal/vertical asymptote, pole, Euler's number, secant, tangent, derivative.

06 Quellen

- Jakob Bernoulli (1690), Zinseszins-Problem · Leonhard Euler, „Introductio in analysin infinitorum“ (1748) · Lehrplan 21 / KMK-Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife, Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (Analysis)

NAME _____ KLASSE _____ DATUM _____

Grenzwerte berechnen – Folgen, Funktionen und der Weg zur Ableitung

1 Merksätze ergänzen ●○○

Bei Brüchen für $x \to \infty$ die _____ ausklammern.

Bei 0/0 erst _____, dann einsetzen.

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der _____.

2 Grenzwerte von Folgen ●○○

a) $(4n + 3)/n$ b) $(6n^2 - n)/(2n^2 + 5)$ c) $(n + 1)/n^2$ d) $(-1)^n \cdot 3$

3 Geometrische Reihe ●●○

a) $3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \ldots$ b) Schreibe 0,444… als Reihe und berechne den Bruch.

4 Lücke oder Polstelle? ●●○

a) $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$ für $x \to 5$ b) $g(x) = 2/(x + 1)$ in der Nähe von -1 c) Welche waagerechte Asymptote hat $h(x) = (5x + 2)/(x - 1)$?

5 Zinseszins ●●○

Berechne $(1 + 1/4)^4$ (vierteljährlich) und vergleiche mit 2,25 € (halbjährlich) und $e \approx 2{,}718$.

6 Sekante → Tangente ●●●

Berechne für $f(x) = x^2$ die Sekantensteigung zwischen 2 und $2 + h$ und daraus die Steigung an der Stelle 2.

7 Skatepark: flachere Rampe ●●●

Eine Rampe hat das Profil $f(x) = 0{,}25x^2$. Wie steil ist sie bei $x = 2$? Welcher Winkel ist das?

8 Quiz aus dem Video – kreuze an ●○○

a) $1/n \to$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ unendlich

b) ∞/∞ ☐ = 1 ☐ = 0 ☐ umformen

c) $(1 + 1/n)^n \to$ ☐ e ☐ 1 ☐ 2

d) Steigung von x^2 bei 1 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 4

Lösungen

1 Merksätze

höchste Potenz · kürzen · Sekantensteigungen

2 Folgen

a) $4 + 3/n \to 4$ b) $(6 - 1/n)/(2 + 5/n^2) \to 3$ c) $1/n + 1/n^2 \to 0$ d) springt zwischen -3 und $3 \to$ divergent

3 Reihe

a) $a = 3, q = 1/3 \to 3 : (2/3) = 4{,}5$ b) $0{,}4 + 0{,}04 + \ldots \to 0{,}4 : 0{,}9 = 4/9$

4 Lücke/Polstelle

a) Lücke: $(x - 5)(x + 5)/(x - 5) = x + 5 \to 10$ b) Polstelle bei -1, senkrechte Asymptote $x = -1$
c) $(5 + 2/x)/(1 - 1/x) \to 5$, also $y = 5$

5 Zinseszins

$1{,}25^4 \approx 2{,}44$ € · mehr als 2,25 €, weniger als $e \approx 2{,}72$ €

6 Sekante → Tangente

$((2 + h)^2 - 4) : h = (4h + h^2) : h = 4 + h \to$ Steigung 4

7 Skatepark

$0{,}25 \cdot ((2 + h)^2 - 4) : h = 1 + h/4 \to m = 1 \cdot \tan \alpha = 1 \to \alpha = 45°$

8 Quiz

a) 0 b) umformen c) e d) 2